KV-Diagramme

Wie kommt man auf effiziente Weise zu einem möglichst einfachen Funktionsterm?

- Eine Methode dafür sind **KV-Diagramme**
  - „Karnaugh-Veitch-Diagramme“ nach Maurice Karnaugh und Edward W. Veitch, 1952/53
- **Beispiel:** Die Funktion f, die als Wertetabelle gegeben ist, soll minimiert werden.

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

- Wir schreiben die Variablen x_1 und x_2 und alle möglichen Werte dafür als Zeilen- und Spaltenköpfe auf

		x_1	
		0	**1**
x_2	**0**	1	1
	1	0	1

KV-Diagramme

- Jetzt versucht man, die Einsen im Diagramm mit möglichst großen **rechteckigen** Blöcken zu überdecken -- die Nullen werden ignoriert.
- Die Einsen im roten Block haben gemeinsam, dass $\mathbf{x_2 = 0}$ ist. Man kann sie also als $\neg x_2$ darstellen.
- Die 1 im grünen Block hat die Bedingung, dass $\mathbf{x_1 = 1}$ **und** $\mathbf{x_2 = 1}$ ist. Man kann sie also durch $x_1 \wedge x_2$ darstellen.
- Insgesamt ergibt sich mit einer „oder“ Verknüpfung der Term $y = \neg x_2 \vee (x_1 \wedge x_2)$

		x_1	
		0	**1**
x_2	**0**	1	1
	1	0	1

KV-Diagramme

- Es geht noch besser: Die rechteckigen Blöcke dürfen sich auch **überlappen**.
- Der grüne Block hat also die Bedingung, dass $\mathbf{x_1 = 1}$ ist.
- Man kann die gesamte Funktion als $y = x_1 \vee \neg x_2$ darstellen – diese Form ist optimal.

		x_1	
		0	**1**
x_2	**0**	1	1
	1	0	1

KV-Diagramme

- Kann man KV-Diagramme auch bei drei Variablen anwenden?
- Die Wahrheitstafel zeigt die Funktion f
- KV-Diagramm:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

		x_1x_2			
		00	**01**	**11**	**10**
x_3	**0**	0	1	1	1
	1	1	0	0	0

zu lesen als:
$x_1 = 1, x_2 = 0$

KV-Diagramme

- **Weitere Regel:** Die Anzahl der Felder einer Gruppe muss eine Zweierpotenz sein (also 1, 2, 4, 8, 16, …)
- Wir können also nicht die drei Einsen oben rechts mit einem Rechteck überdecken.

  Mögliche Lösung: Zwei Rechtecke, die sich überlappen, dazu das blaue Rechteck unten links.

		x_1x_2			
		00	**01**	**11**	**10**
x_3	**0**	0	1	1	1
	1	1	0	0	0

  - Rot: x_1 ist egal (0 oder 1), $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ $\quad x_2 \land \neg x_3$
  - Grün: $x_1 = 1$, x_2 ist egal (0 oder 1), $x_3 = 0$ $\quad x_1 \land \neg x_3$
  - Blau: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ $\quad \neg x_1 \land \neg x_2 \land x_3$
  - Zusammen: $y = (x_2 \land \neg x_3) \lor (x_1 \land \neg x_3) \lor (\neg x_1 \land \neg x_2 \land x_3)$

KV-Diagramme

- Bei der Aufstellung der Variablenwerte ist die Reihenfolge wichtig: Von jedem Feld zum Nachbarn ändert sich **genau ein Wert**.
- Es auch relativ egal, bei welcher Variablenbelegung man beginnt.
- Darum darf man nebeneinanderliegende Einsen zusammen gruppieren: Sie unterscheiden sich im Wert einer Variablen, diese Variable kann dann weggelassen werden, denn ihr Wert spielt keine Rolle.

x_1x_2			
00	**01**	**11**	**10**

x_1x_2			
01	**00**	**10**	**11**

KV-Diagramme

- Nachbarschaften dürfen auch „über den Rand hinweg“ bestehen.
- Man stellt sich dazu vor, das KV-Diagramm wäre an den Rändern aneinandergeklebt.
- **Beispiel:**

		x_1x_2			
		00	**01**	**11**	**10**
x_3	**0**	1	1	0	1
	1	0	1	0	0

- **Ergebnis:** $y = \neg x_1 \wedge x_2 \vee \neg x_2 \wedge \neg x_3$

KV-Diagramme

- KV-Diagramme können einfach auf vier Variablen erweitert werden:
- **Beispiel:**
  - Rote Gruppe:
    $x_1 = 1$, x_2 egal, $x_3 = 0$, x_4 egal
  - Grüne Gruppe:
    $x_1 = 0$, x_2 egal, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$
  - Blaue Gruppe:
    x_1 egal, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$

		x_1x_2			
		00	**01**	**11**	**10**
x_3x_4	**00**	0	0	1	1
	01	1	0	1	1
	11	0	0	0	0
	10	1	1	0	0

- **Ergebnis:**
  $y = x_1 \wedge \neg x_3 \vee \neg x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \vee \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$