Kellerautomaten und Klammersprachen

[1)]

(A1) Vorüberlegungen

(A) Konstruiere einen endlichen Automaten, der die Sprache $L_{Klammer2}$ aller Klammerausdrücke bis zur Tiefe 2 erkennt. Zur Sprache gehören z.B.

```
((()), ()(), (), (()(()))
```

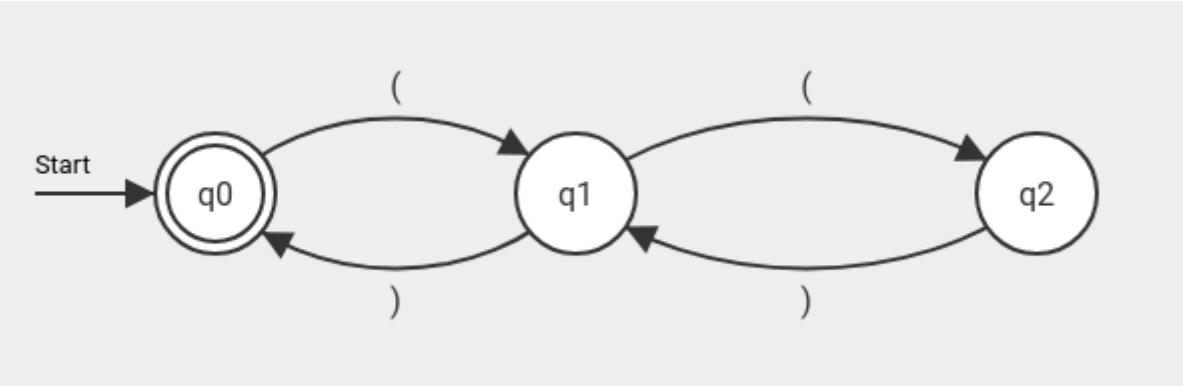
Nicht zur Sprache gehören z.B.

```
(((()), ((()))), ()), )(, )()(
```

(B) Gibt es einen endlichen Automaten A, der die Sprache $L_{()} = \{(^n)^n \mid n = 1, 2, 3, ...\}$ erkennt? Wie sehen diese aus und worin unterscheiden sich die Automaten, die unterschiedliche Klammerungstiefen erkennen?

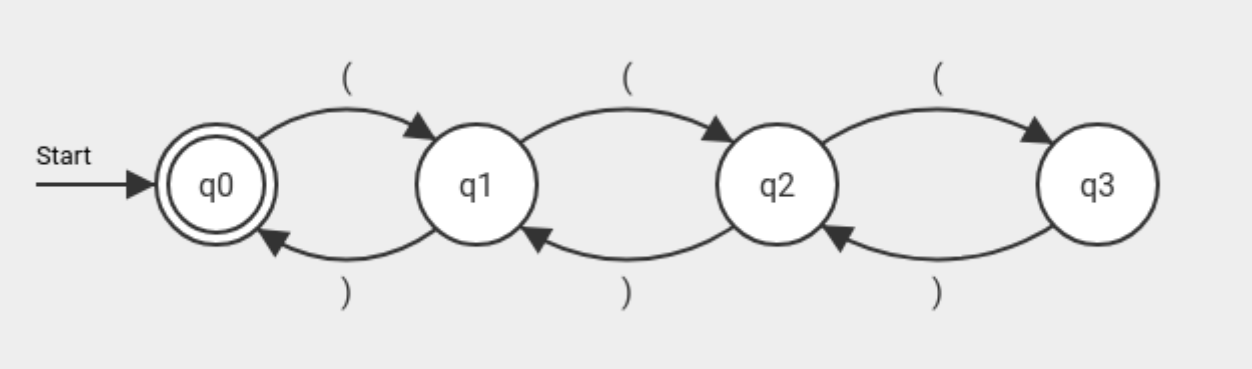
(C) Gib einen endlichen Automaten A an, der die allgemeine Klammersprache, also Klammerungen beliebiger Tiefe erkennt - siehst du ein Problem?

Lösung (A)



Lösung (B)

Ein Automat, der Klammerungen bis zur Tiefe 3 erkennen kann sähe so aus:



Für jede weitere Klammertiefe, die erkannt werden soll, muss ein weiterer Zustand hinzugefügt werden:

- Tiefe 2: https://flaci.com/A541hkqyky
- Tiefe 3: https://flaci.com/Afy17ed34i
- Tiefe 4: https://flaci.com/A5a9vz8j89

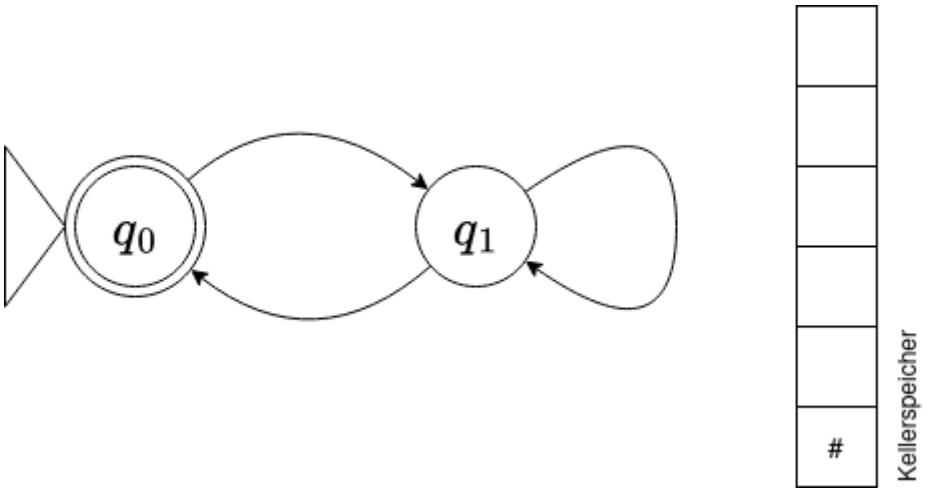
> Erkenntnis zu (C)
>
> Versuche, einen solchen endlichen Automaten A zu konstruieren, scheitern an der Unmöglichkeit, die Anzahl der öffnenden Klammern im Automaten mit zu zählen.
>
> Die **Endlichkeit** eines endlichen Deterministische Automaten besteht in der **Endlichkeit der Zustände** – um "zählen" zu können, wie viele Klammern bereits geöffnet wurden und damit auch wieder geschlossen werden müssen, braucht man genau einen Zustand mehr als die Klammertiefe beträgt. Ist diese beliebig, so ist kein Automat mit endlich vielen Zuständen konstruierbar.
>
> Wichtig ist der **Unterschied zur Eingabelänge** der gültigen Wörtern eine Sprache, die durch einen endlichen Automaten erkannt werden kann: Diese kann sehr wohl unendlich lang sein – das äußert sich lediglich darin, dass der Automat in Schleifen wiederholt durchlaufen wird, bis er am Ende des Eingabeworts an einen akzeptierenden Endzustand gelangt.

Der Kellerautomat am Beispiel

Wir erweitern den endlichen Automaten um einen **Speicher**, der (potentiell) unbegrenzt viele Daten aufnehmen kann. Für **kontextfreie Sprachen**[2] reicht als Speicher ein **Stack** – dieser wird auch als "Keller" bezeichnet, aus diesem Grund nennt man solche um einen Stack erweiterten DEAs "Kellerautomat".

Für unsere Klammersprache könnte ein erster Entwurf eines Kellerautomaten so aussehen - der Kellerspeicher ist hier mit 6 "Speicherplätzen" gezeichnet, kann aber durch weiteres "auf den Stack

legen" beliebig erweitert werden:



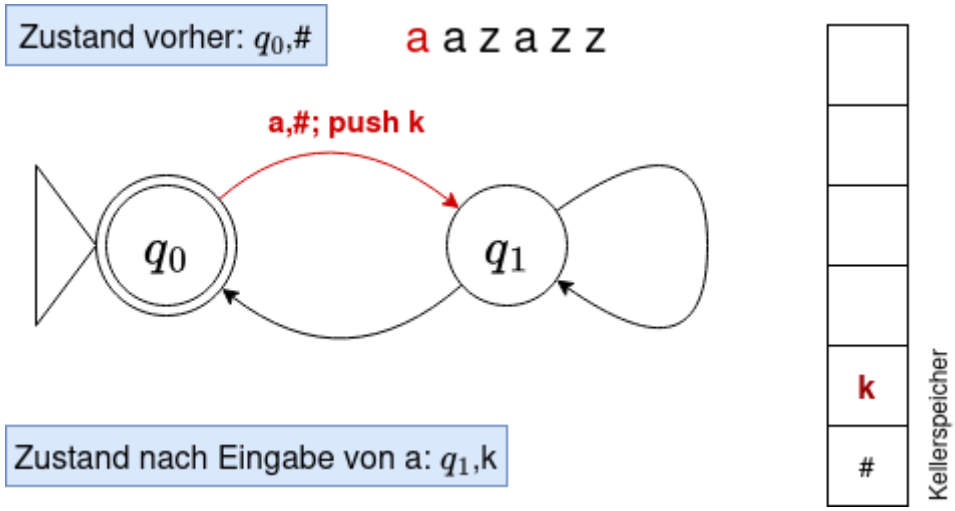
Zu Beginn ist der Kellerspeicher leer - das wird durch das Symbol **#** gekennzeichnet - der Ablauf beginnt beim markierten Startknoten. Der Automat befindet sich also zu Beginn im Zustand **q_0,#**

Um Komplikationen beim Aufschreiben der Klammern zu vermeiden, verwenden wir von nun an für eine öffnende Klammer das Symbol **a**, für eine schließende Klammer ein **z**. Wir wollen nun nachvollziehen, ob das Wort **aazazz** vom Automaten akzeptiert wird - und vor allem, was der Automat dabei alles "tun" muss.

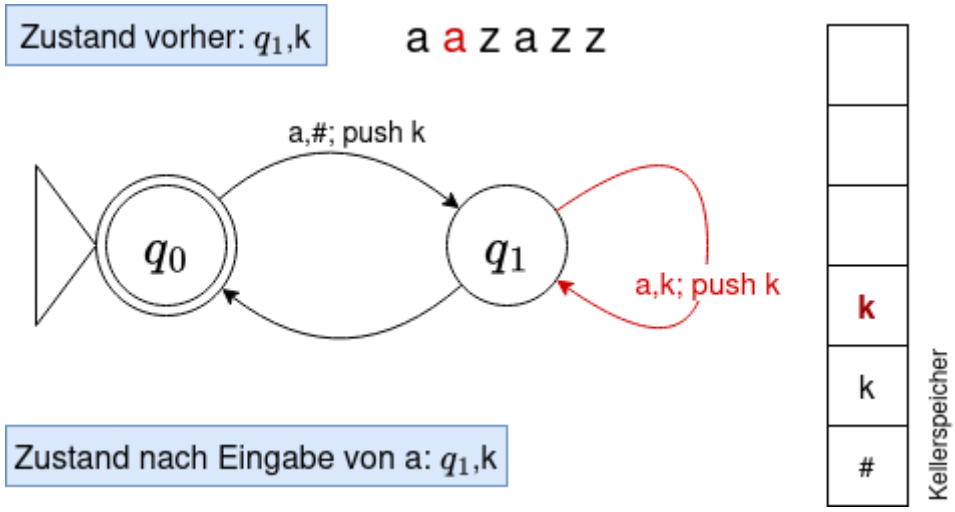
- Wir müssen bei jedem Übergang von einem Zustand in einen anderen nun auch noch unseren Speicher "bedienen". Der Speicher kennt 3 Operationen:
  - Etwas auf den Stack legen **push**
  - Das oberste Element vom Stack herunter nehmen **pop**
  - Den Stack unverändert belassen **noop**
- Welche Speicheroperation wir bei einem Zustandsübergang ausführen hängt nicht nur von der Eingabe ab, sondern kann außerdem vom Zustand des Stacks abhängen. Ist der Stack leer, welches Element liegt oben?

Schritt für Schritt - wir bauen einen Kellerautomaten

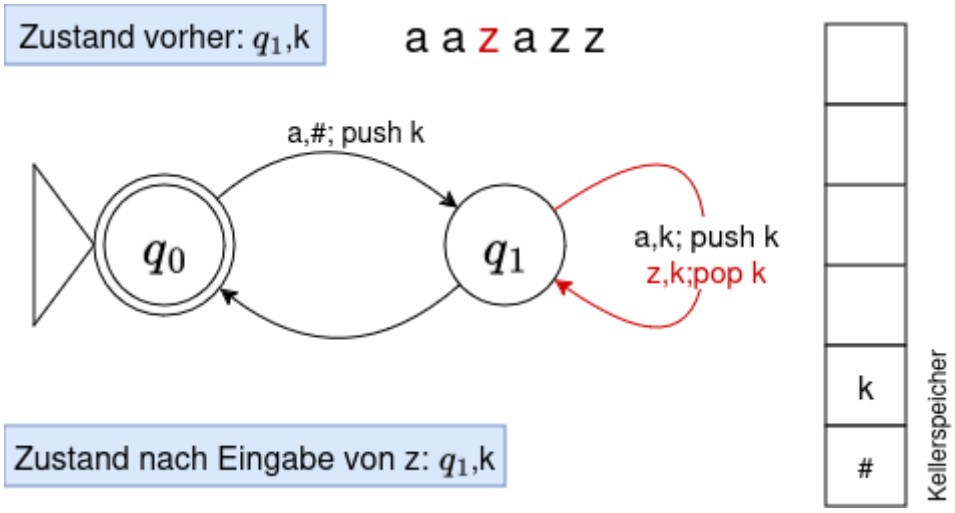
> Mit einem z kann der Ausdruck nicht beginnen, das führt direkt zu einem Fehler - die Frage ist also, was geschehen muss, wenn bei leerem Stack in Zustand q_0 ein **a** eingegeben wird - wie muss der obere Übergang von q_0 nach q_1 beschriftet werden? Der Ausgangzustand ist **q_0,#**, der nächste Zustand ist q_1 - die Eingabe ist in diesem Fall also **a,#**, "Klammer auf, Stack leer". Welche Operation führen wir mit dem Speicher aus, um uns zu merken, dass wir eine Klammer geöffnet haben? → Wir legen eine Klammer **k**[3] auf den Stack, um zu speichern, dass wir in der ersten Klammerebene sind: **push k**.



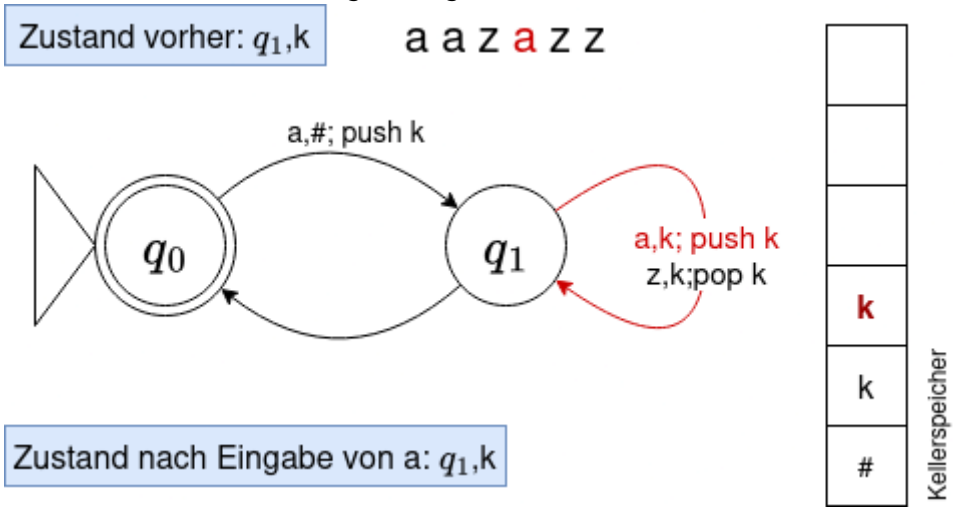
Wir befinden uns jetzt also in Zustand **q_1,k**. Wenn wir jetzt noch einmal eine öffnende Klammer eingeben, erhöhen wir die Klammertiefe, wir müssen also bei q_1 bleiben, allerdings legen wir ein weiteres k auf den Stack - wir merken uns damit, dass wir in der 2. Klammerebene sind.



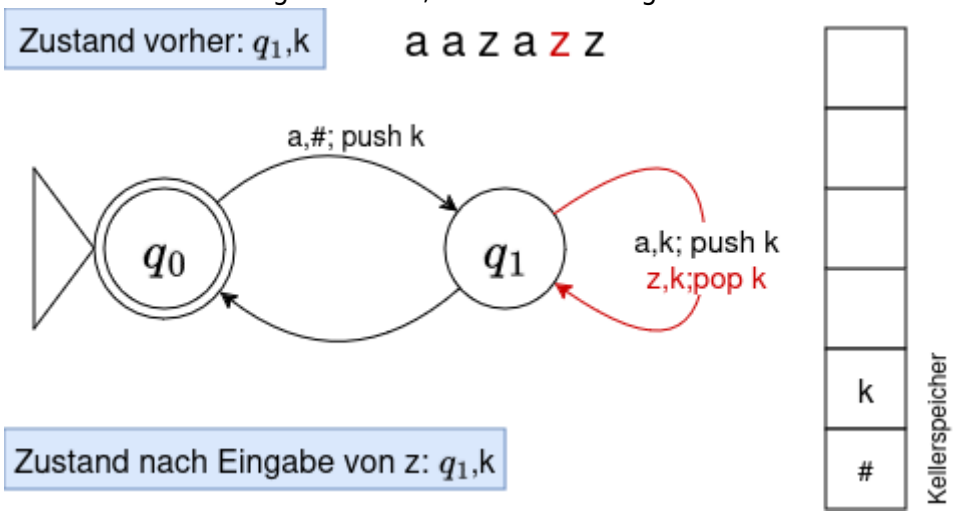
Wenn wir nun in Zustand q_1,k die erste schließende Klammer z eingeben gelangen wir nicht in einen gültigen Endzustand, also nicht nach q_0, sondern wieder nach q_1, müssen die Klammerungstiefe aber um eins reduzieren - das machen wir, indem wir eine Klammer k vom Stack entfernen.



Solange mindestens ein k auf dem Stack liegt, müssen wir jetzt keine neuen Übergänge und Kelleroperationen mehr festlegen: Jedes a legt ein k auf den Stack, jedes z entfernt eines - damit wird Buch über die Klammerungstiefe geführt.

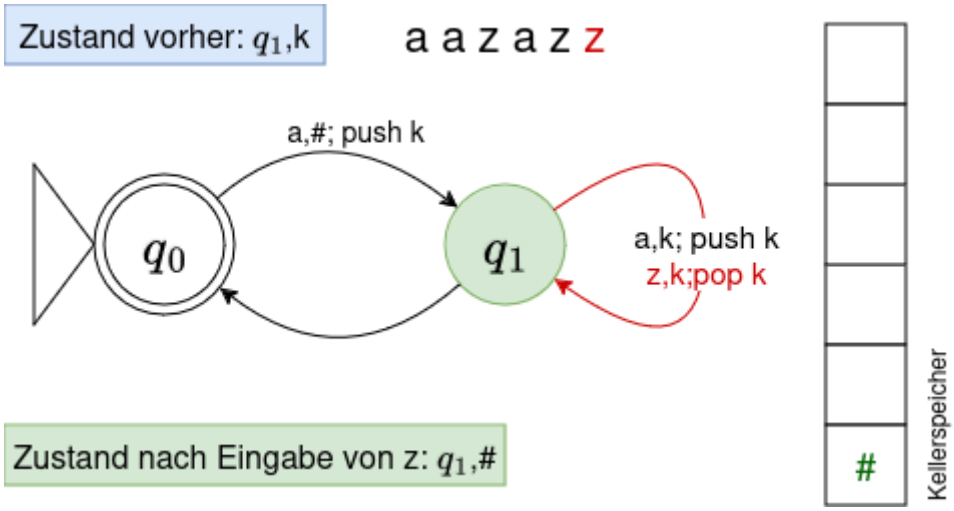


Es wird wieder ein k vom Stack genommen, die Klammerungstiefe reduziert.

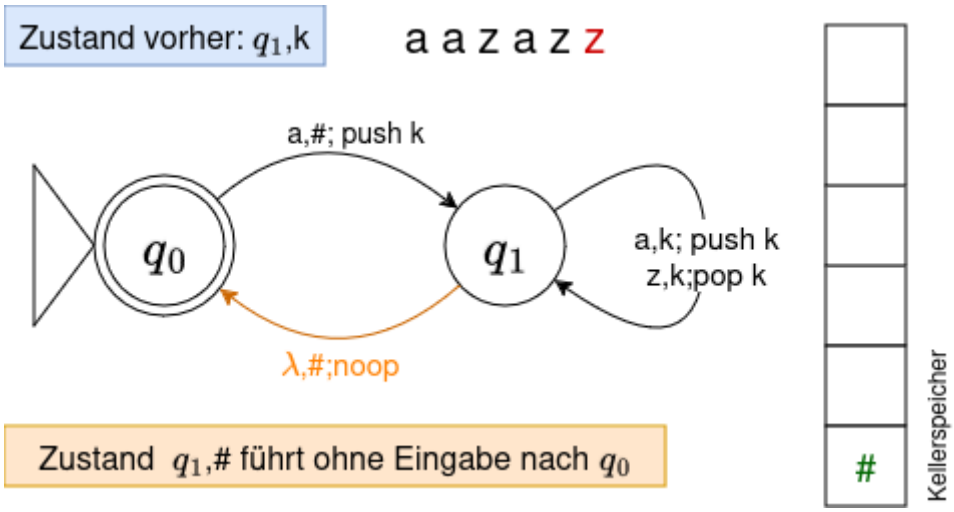


Mit der letzen schließenden Klammer wird das letzte k vom Stack entfernt, der Zustand des Automaten ist jetzt **q_1,#**.

Das stellt ein kleines Problem dar: Dieser Zustand signalisiert, dass das Eingabewort vom Automaten akzeptiert wird, denn hier kommen wir nur dann an, wenn wir gleich viele Klammern geöffnet haben wie wir geschlossen haben - **q_1,#** ist gewissermaßen ein akzeptierender Endzustand, q_1 alleine kann aber keiner sein.



Um diese Situation aufzulösen und berücksichtigen zu können, dass q_1 bei leerem Stack ein Endzustand ist, kann man einen Übergang definieren, der kein Eingabezeichen verbraucht, also bei λ "automatisch" ausgeführt wird, wenn der Stack einen bestimmten Zustand hat. Es dürfen dabei aber keine mehrdeutigen Übergänge entsteheen, da der Automat andernfalls nicht mehr deterministisch wäre.



Formale Darstellung eines Kellerautomaten

Ein Kellerautomat ist ein 6 Tupel, besteht also aus 6 Bestandteilen A={∑,Q,s,E,δ,Γ}[4)]

Allgemein	**Am Beispiel**
Eingabealphabet ∑	∑ = {a, z}
Menge Q von Zuständen	Q = {q0,q1,qF} (incl. Fehlerzustand!)
Startzustand s ∈ Q	s = q0
E ⊆ Z von Endzuständen	E = {q0}
Übergangsfunktion δ hängt meist von mehreren Krtiterien ab	Hängt von drei Kriterien ab, muss deswegen zeilenweise angegeben werden (s.u.)
Stackalphabet Γ (Gamma)	Γ ={#, k}; das # steht für einen leeren Stack

Die Übergangsfunktion δ für unser Beispiel kann zeilenweise wie folgt angegeben werden:

Kriterien				**Auswirkung**	
alter Zustand?	Eingabe?	auf Stack?	→	neuer Zustand	Operation
q_0	a	#	→	q_1	push k
q_1	a	k	→	q_1	push k
q_1	z	k	→	q_1	pop k
q_1	λ	#	→	q_0	nop

Ablaufprotokoll eines Kellerautomaten

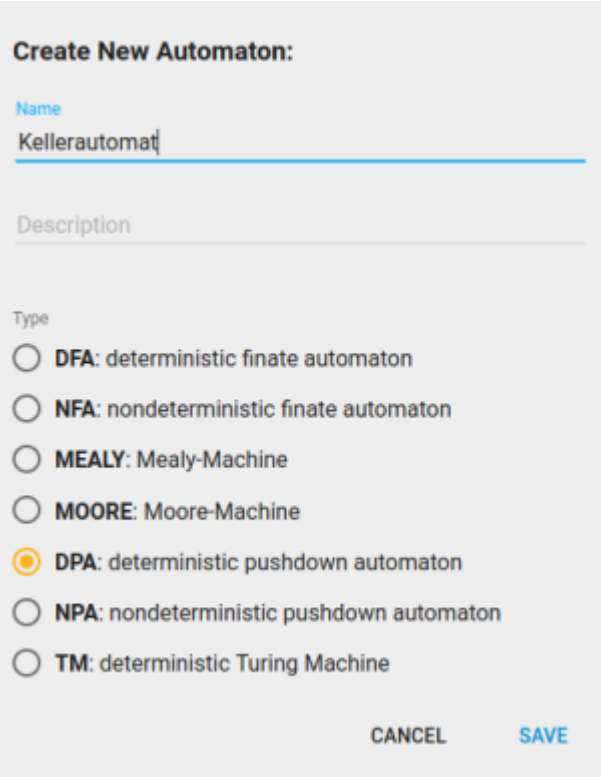
Der "Lauf" eines Kellerautomaten bei der Verarbeitung einer Eingabe kann in einem Ablaufprotokoll dokumentiert werden, wobei die durchlaufenen Zustände, die Entwicklung des Stack und das Verbrauchen der Eingabe sichtbar werden sollten. Dazu eignet sich beispielsweise die Darstellung als Tabelle - hier für unsere Beispieleingabe **aazazz**:

Stack			k		k			
		k	k	k	k	k		
	#	#	#	#	#	#	#	#
Zustand	q0	q1	q1	q1	q1	q1	q1	q0
Vom Übergang verbrauchtes Eingabezeichen		a	a	z	a	z	z	

Eingabe endet, q0 ist Endzustand: Wort wird akzeptiert!

Aufgaben

(A2)



- Simuliere den Klammerautomaten in FLACI.
- Teste den Automaten mit verschiedenen Eingaben und vollziehe seine Funktionsweise nach.

Hinweise

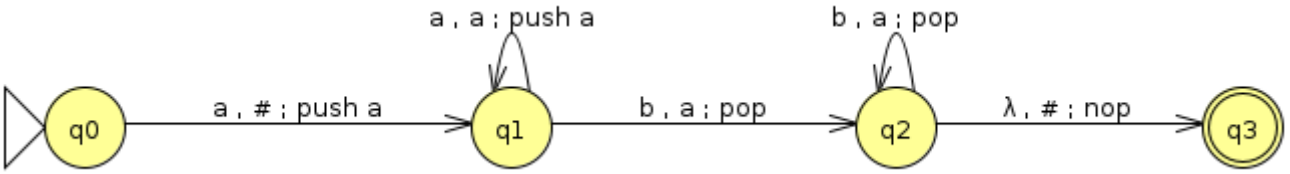
Flaci verwendet eine geringfügig andere Darstellung als unser Beispiel, außerdem stellt es die Stack Operationen nicht direkt zur Verfügung.

- Du musst einen DPA oder einen DKA erzeugen, je nach Spracheinstellung deines Browsers.
- Bei der Darstellung des Übergangs verwendet Flaci folgende Konvention:
  `(Stacksymbol, Eingabezeichen):Erstetzung für das Stacksymbol`
  - `(X,g):XX`: **push X**. Wenn das oberste Element des Stacks ein X ist und ein g eingegeben wird, wird X durch XX ersetzt, es wird also ein X auf den Stack gelegt.
  - `(X,b):ε`: **pop**. Wenn das oberste Element des Stacks ein X ist und ein b eingegeben wird, wird X durch "nichts" (ε) ersetzt.
  - `(X,p):X`: **noop**. Wenn das oberste Element des Stacks ein X ist und ein p eingegeben wird, wird X durch X ersetzt, es passiert also nichts.

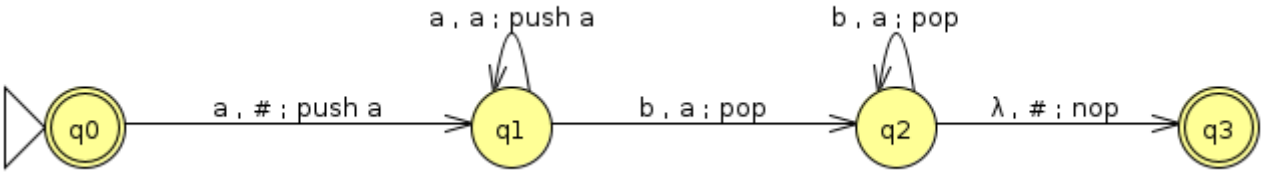
(A3)

Gegeben sind folgende Kellerautomaten. Beschreibe für jeden der Automaten die Wörter, die dieser erkennt und erstelle jeweils Ablaufprotokolle für zwei aussagekräftige Beispieleingaben – ein Wort, das akzeptiert wird und eines, das verworfen wird.

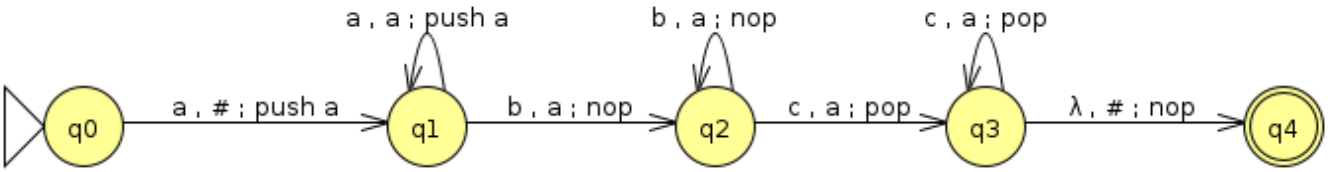
(A)



(B)

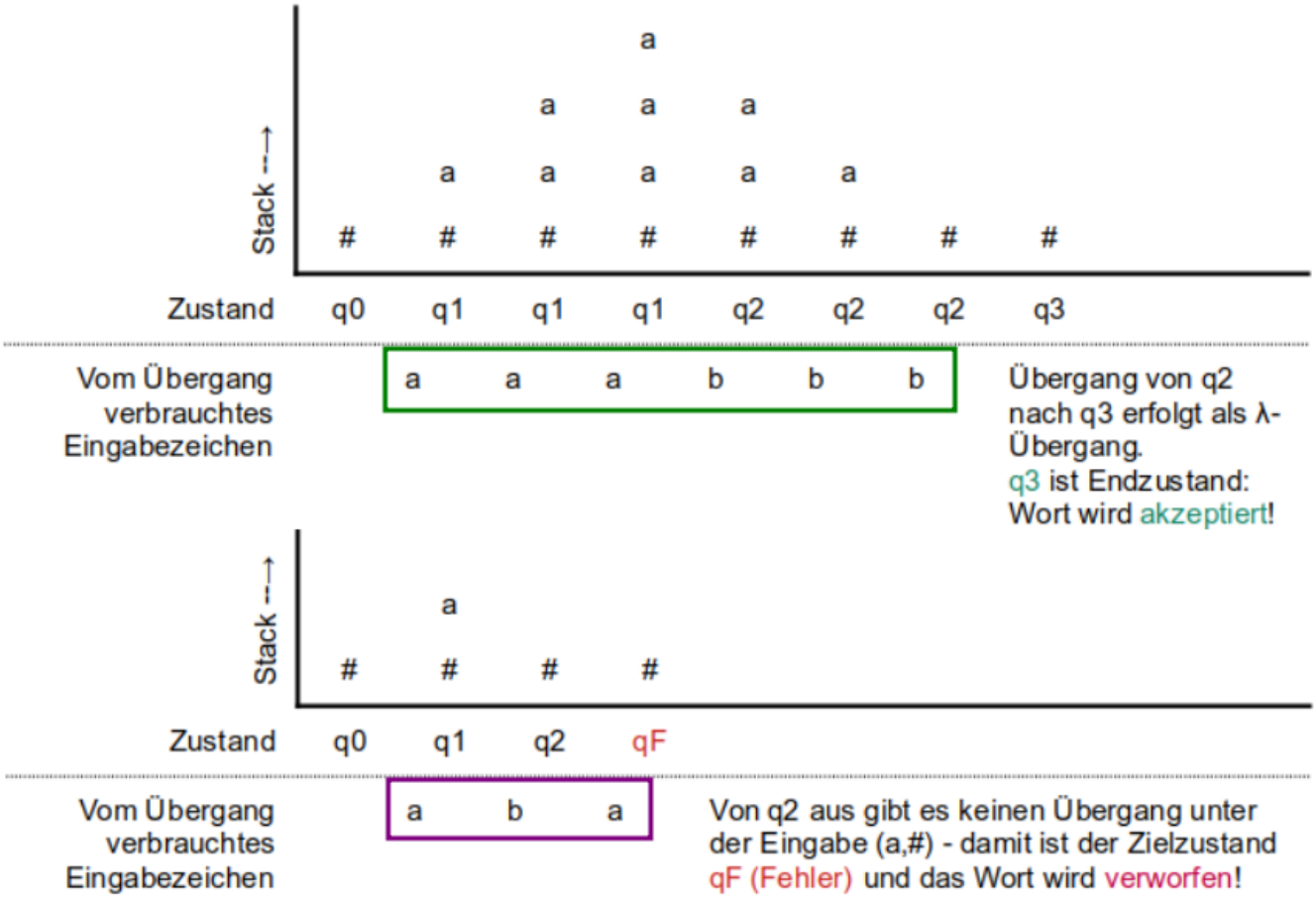


(C)



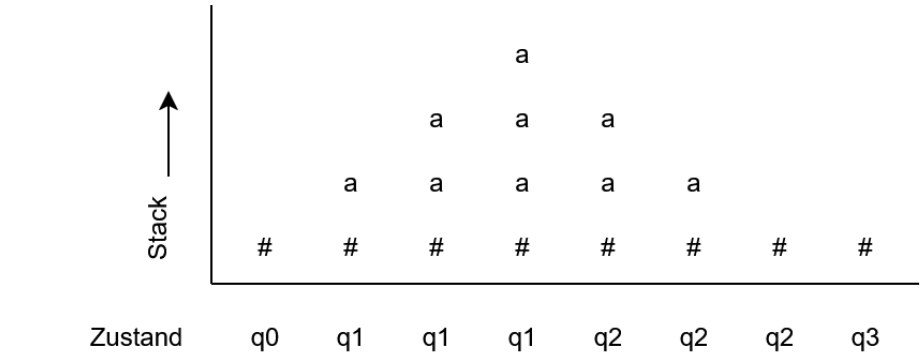
Lösung (A)

L = { $a^n b^n$ | n > 0 } → Wörter mit einer Anzahl n von "a" gefolgt von derselben Anzahl "b".



Lösung (B)

L = { $a^n b^n$ | n ≥ 0 } → Wörter mit einer Anzahl "a" gefolgt von derselben Anzahl "b" – das leere Wort ist Teil der Sprache.



Vom Übergang verbrauchtes Eingabezeichen

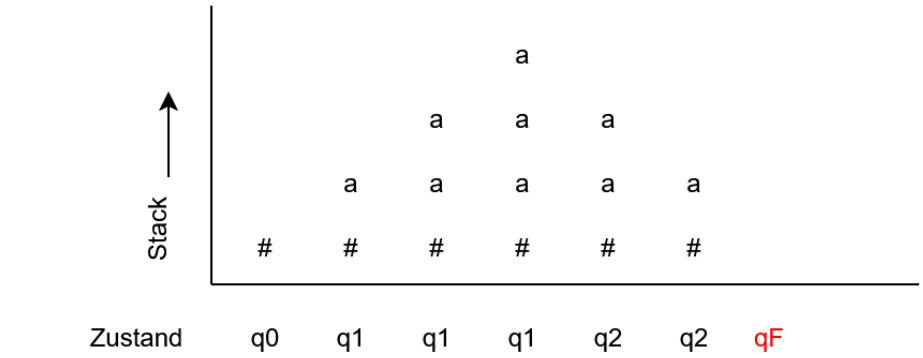
a	a	a	b	b	b

Übergang von q2 nach q3 erfolgt als λ -Übergang.
q3 ist Endzustand: Wort wird akzeptiert!

Vom Übergang verbrauchtes Eingabezeichen

a	a	b	b	b

Von q2 aus gibt es keinen Übergang unter der Eingabe (b,#) - damit ist der Zielzustand qF (Fehler) und das Wort wird verworfen



Vom Übergang verbrauchtes Eingabezeichen

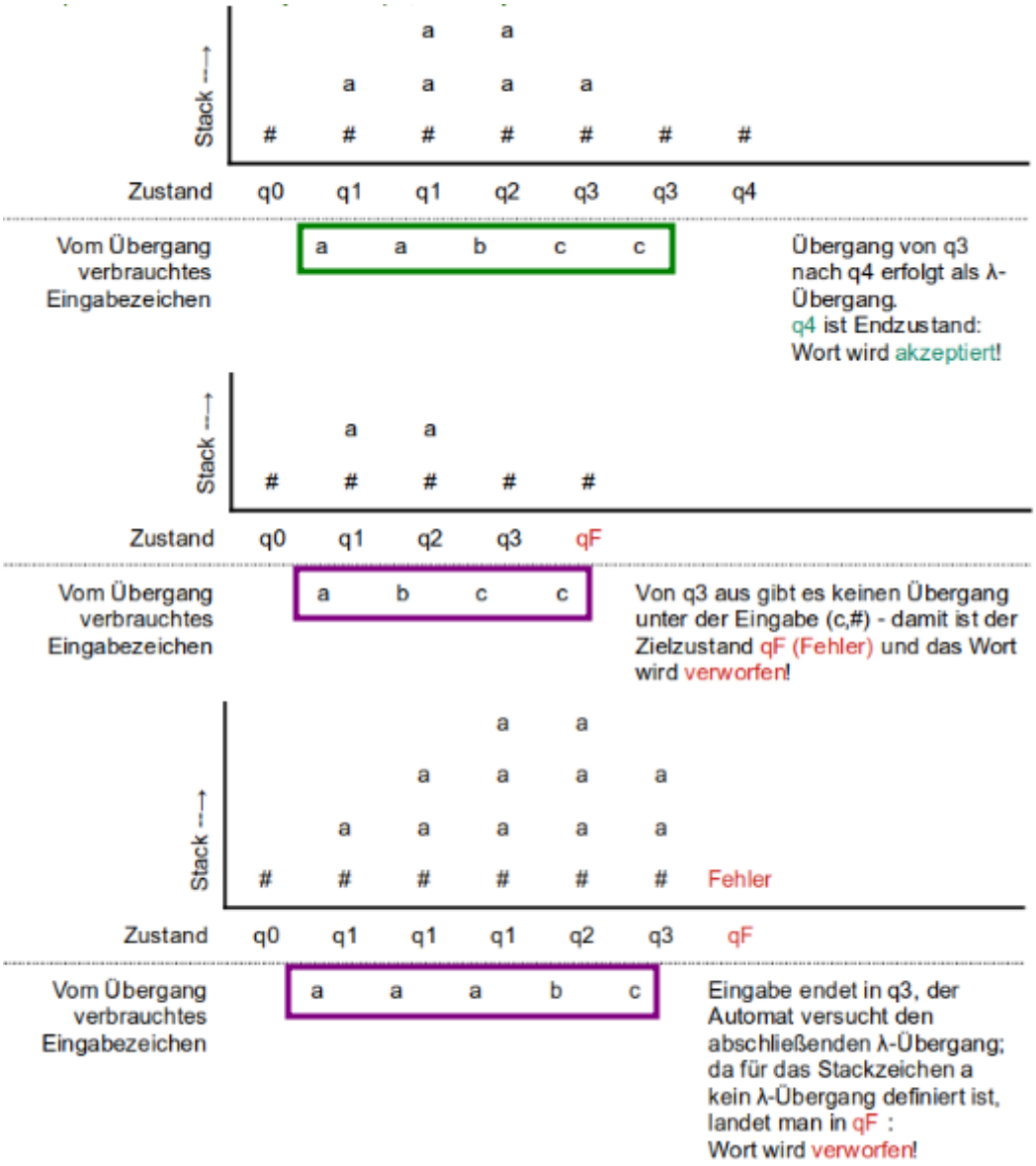
a	a	a	b	b

Von q2 aus gibt es keinen Übergang unter der Eingabe (λ,a) - damit ist der Zielzustand qF (Fehler) und das Wort wird verworfen

Am Ende der Eingabe wird also immer versucht, mittels λ-Übergang abzuschließen. Dabei landet man entweder im akzeptierenden Zustand q_0 (wenn ein # auf dem Stack liegt, dieser also leer ist) oder aber im Fehlerzustand q_F (wenn der Stack nicht leer ist, dort also ein anderes Zeichen als der Stackboden # obenauf liegt).

Lösung (C)

L = { $a^n b^m c^n$ | n,m > 0 } → Wörter mit einer Anzahl "a" gefolgt von beliebig vielen b, gefolgt von derselben Anzahl "c" wie zu Beginn "a" vorhanden waren.



(A4)

Entscheide mit Hilfe eines Kellerautomaten, ob die folgenden Sprachen kontextfrei sind. Sprachen sind kontextfrei, wenn sie von einem Kellerautomaten erkannt werden können. Wenn die Sprache kontextfrei ist, dann erläutere, wie der Kellerautomat arbeiten würde. Falls nicht, dann begründe, warum sie nicht mit einem Kellerautomaten erkannt werden kann.

- **(A)** $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$
- **(B)** $L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$
- **(C)** $L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid \#a = \#b \}$ die alle Wörter enthält, die aus gleich vielen a und b bestehen, die – im Gegensatz zur Sprache aus Aufgabenteil a) - in beliebiger Reihenfolge auftreten dürfen. (Hinweis: #a bezeichnet die Anzahl der a´s in dem betreffenden Wort.)
- **(D)** $L = \{ a^n b^m c^n \mid n, m \geq 0 \}$

Lösung 4(A)

Die Sprache ist kontextfrei (aber nicht regulär) – für jedes "a" der Eingabe legt man einen Marker auf den Keller, für jedes "b" nimmt man einen herunter. Ist der Keller am Ende leer, wird das Wort akzeptiert.

Lösung 4(B)

Die Sprache ist nicht kontextfrei – dies ist leicht einzusehen, wenn man versucht, festzulegen, wann der Stack auf- und wann er abgebaut wird. Man wird annehmen, dass "a" den Stack aufbaut. Dann könnte "b" den Stack abbauen, aber für "c" gibt es damit keine Zählmöglichkeit mehr. Wir würden also einen weiteren Stack benötigen, um diese Sprache zu erkennen. Dann könnte man auf beide Stacks bei Lesen von "a" ein Zeichen legen und bei Lesen von "b" Stack 1, bei Lesen von "c" Stack 2 abbauen.

Lösung 4(C)

Diese Sprache ist kontextfrei. Man kann mit zwei Zeichen im Stackalphabet arbeiten: ist ein "a" auf dem Stack und kommt ein weiteres "a", wird dieses obenauf gelegt. Folgt hingegen ein "b", wird das "a" abgebaut. Ist bei Eingabe "b" kein "a" zum abbauen vorhanden, wird das "b" auf den Stack gelegt und seinerseits von "a"s abgebaut.

Lösung 4(D)

Diese Sprache ist kontextfrei: beim Lesen von "a" wird ein Zeichen auf den Stack gelegt, bei Lesen von "b" bleibt der Stack unverändert und bei Lesen von "c" wird der Stack abgebaut. Da gleich viele "a" und "c" enthalten sein müssen, ist mindestens ein Kellerautomat notwendig – die Sprache ist daher nicht regulär.

(A5) Zusatzaufgabe

Implementiere in Java zunächst einen endlichen Automaten der die Klammersprache L_2 aus dem Eingangsbeispiel erkennt, Arbeite mit a und z für Klammer auf und Klammer zu.

- Die Eingabe soll als Parameter beim Erstellen des Automaten erfragt werden.
- Modelliere die Zustände des Automaten und gib bei der Bearbeitung der Eingabe die Zustandswechsel auf den Konsole aus, so dass der Ablauf bei der Verarbeitung der Eingabe erkennbar ist.
- Erweitere den Automaten um einen Stack, um unendlichen Klammertiefen zu erkennen. Erstelle bei der Verarbeitung der Eingabe ein Ablaufdiagramm wie oben, das du auf der Konsole ausgibst.
    1. *Tipp 1: Importiere den Stack mit* `import java.util.Stack;` *und denke anschließend an das Initialisieren.*
    2. *Tipp 2: Um das oberste Element zu prüfen (ohne es zu entfernen), rufe* `peek()` *auf dem Stack auf.*

Material

- Präsentation: Kellerautomaten (PDF)[5] (Code)

[1] Diese Seite basiert auf der Arbeit von Dietrich/Lautebach und steht unter einer CC BY-NC-SA Lizenz

[2] Kontextfreie Sprachen sind diejenigen, die von einem Kellerautomaten erkannt werden können.

[3] Warum reicht es ein k auf den Stack zu legen und nicht a und z?

[4] Gelegentlich, z.B bei Flaci, wird das Zeichen für den leeren Stack als 7. Element des Tupels extra angegeben

[5] Link öffnen, dann aus dem Browser in ein PDF drucken