

# Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

In Informatiksystemen ist es auch nötig, mit negativen Zahlen zu arbeiten. So kann man eine Subtraktion als Addition der Gegenzahl auffassen:  $11 - 6 = 11 + (-6)$  - es vereinfacht also vieles, wenn man weiß, wie man diese Gegenzahlen finden kann. **Aber wie kann man negative Zahlen im Binärsystem darstellen?**

## Vorzeichenbit

**Ein erster Gedanke:** Man könnte einfach das Bit ganz links als "Vorzeichenbit" verwenden.

- $+42_{10} = 00101010_2$
- $-42_{10} = 10101010_2$



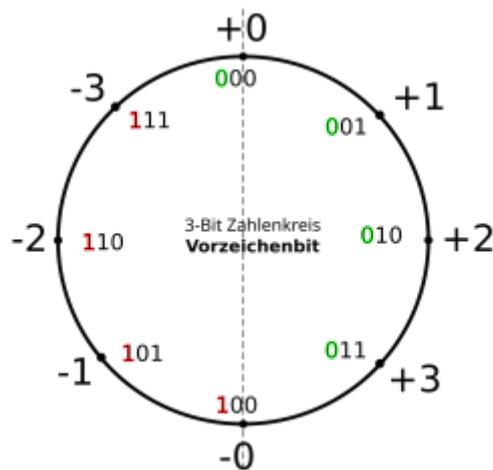
**(A1)**

Verwende die binäre Darstellung für +42 und -42 von oben und addiere schriftlich (im Binärsystem) jeweils die Zahl  $3_{10} = 011_2$ . Erläutere anhand dieses Beispiels, warum die Darstellung mit einem "Vorzeichenbit" problematisch ist.

Hinweis

42	00101010
+ 3	.11
<hr/>	
	00101101
<hr/>	
- 42	10101010
+ 3	.11
<hr/>	
	10101101

Wenn man sich auf eine festgelegte Stellenzahl beschränkt, kann man sich die Darstellung ganzer Zahlen im Binärsystem an einem "**Zahlenkreis**" veranschaulichen. Für Zahlen mit einer Länge von 3Bit sieht dieser so aus:



Man kann hier schön sehen, dass man mit drei Bit alle Zahlen von -3 bis +3 darstellen kann.



**(A2)**

- Kannst du am Zahlenkreis weitere Probleme der Darstellung negativer Zahlen mit einem Vorzeichenbit erkennen?
- Berechne  $+1 + (-1)$  in der aus dem Kreis entnommenen Binärdarstellung. Erkennst du ein Problem.
- Zeichne den Zahlenkreis für 4Bit lange Binärzahlen. Welchen Wertebereich kann man hier abdecken?
- Formuliere stichwortartig eine kurze Zusammenfassung zur Darstellung negativer Zahlen mit dem Vorzeichenbit - siehst du Vorteile? Siehst du Nachteile? Ist das eine gute Darstellungsmöglichkeit?

Hinweis "weiteres Problem":

Woran liegt es, dass man statt der üblichen 8 Zahlen, die man mit 3Bit darstellen kann nur 7 Zahlen darstellen kann?

Lösung Rechnung

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 1 \\
 + & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 + 1 \\
 - 1 \\
 - 2 \downarrow
 \end{array}
 \end{array}$$

## Hinweis: Zahlenkreis 4Bit

Du kannst dich an folgendem, teilweise ausgefüllten Kreis orientieren:



## Komplementdarstellungen

Um die verheerende Rechenschwäche des Vorzeichenbits zu beheben, haben sich **Komplementdarstellungen** für negative Zahlen etabliert.

Um das "Komplement" einer binären Zahl zu bilden, werden an allen Stellen 1 und 0 vertauscht.

Dies hat den Vorteil, dass Rechenoperationen wie z.B. die Addition in beiden Zahlenbereichen funktionieren.

### Einerkomplement

Eine negative Zahl im Dezimalsystem wird bei der **Einerkomplement**-Darstellung zunächst als Betrag in eine Binärzahl umgewandelt und dann das Komplement gebildet. Negative Zahlen beginnen dabei stets mit einer 1, d.h. man muss evtl. links eine oder mehrere 0-en anfügen, um bei der Komplementbildung die "Vorzeichen-Eins" zu erhalten.

#### Beispiel

- Wenn man  $-6_{10}$  im Einerkomplement darstellen möchte, ermittelt man zunächst die Binärdarstellung von  $+6_{10} = 110_2$
- Nun fügt man links eine weitere 0 an:  $0110_2$  - diese verändert zunächst nichts am Zahlenwert, schafft aber Platz für eine weitere Stelle für das Vorzeichen.
- Abschließend bildet man das Komplement und erhält die **Einerkomplementdarstellung** für  $-6_{10} = 1001_2$ .



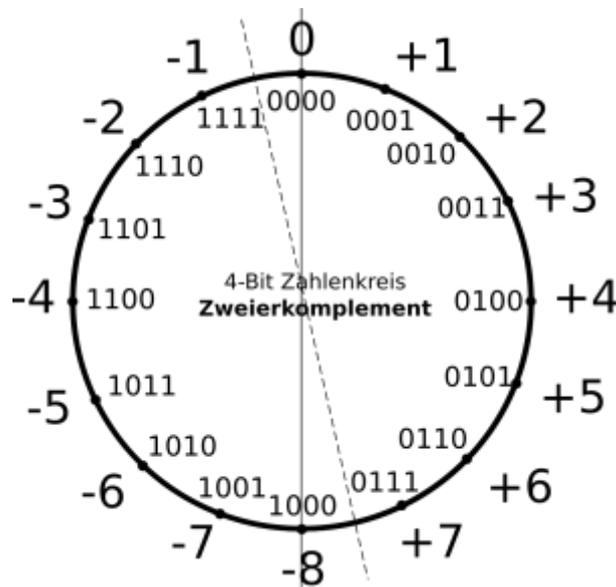
### (A3)

Auch die Einerkomplementdarstellung kann man sich an einem Zahlenkreis veranschaulichen - für Binärzahlen der Länge 4 Bit sieht der (unvollständige) Zahlenkreis so aus:



- Vervollständige den Zahlenkreis.
- Berechne schriftlich im Binärsystem  $-5 + 2$ .
- Berechne schriftlich im Binärsystem  $-5 + 6$ .
- Bestimme die Einerkomplementdarstellung von  $0000_2$
- Woran kann man bei der Darstellung im Einerkomplement negative Binärzahlen erkennen?
- Welche Folgerungen ziehst du aus den Ergebnissen dieser Aufgabe?

Lösung: Zahlenkreis



Lösungen: Rechnungen

## Zweierkomplement

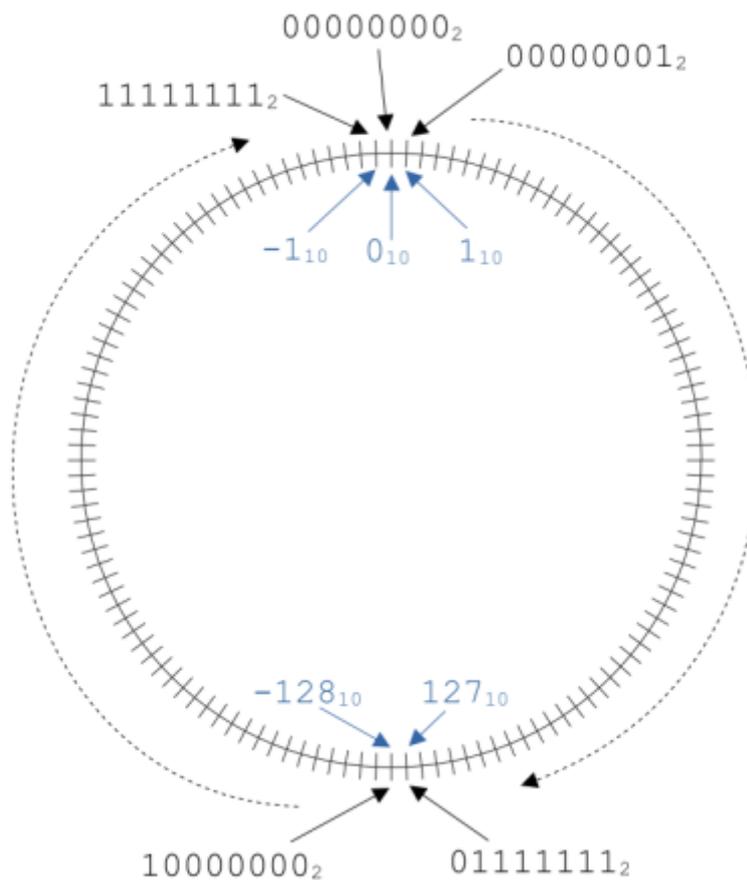


Mithilfe des sogenannten **Zweierkomplements** lassen sich negative Binärzahlen so darstellen, **dass alle Rechenregeln wie bislang funktionieren.**

Die Idee des ZK ist es, jeweils das Bit mit der höchsten Wertigkeit als negativen Wert zu definieren. Ein Beispiel anhand eines 8-Bit-Wertes:

Stelle	7	6	5	4	3	2	1	0
Wertigkeit 2er-Potenz	$-2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
Wertigkeit dezimal	-128	64	32	16	8	4	2	1

So erhält man eine eindeutige Darstellung der 0 und kann auch "über die Null hinweg" rechnen, ohne Fehler zu machen. Die folgende Veranschaulichung kann helfen, das zu verstehen.



**Trick:** wenn die Zahl  $z$  als Binärzahl gegeben ist, erhält man  $-z$  in Zweierkomplementdarstellung, indem man erst alle Bits invertiert und zum Ergebnis dieser Operation 1 addiert.

 *Beispiel:*  $3_{10} = 0011_2$ . man erhält  $-3$  im Zweierkomplement, indem man zunächst alle Stellen der Binärzahl invertiert:  $1100_2$ . Dann addiert man 1:  $1101_2 = -8 + 4 + 1 = -3$ .



### (A3)

- Welcher Zahlbereich lässt sich im ZK mit 8 Bit darstellen?
- Welcher Zahlbereich lässt sich im ZK mit n Bit darstellen?
- Rechne um:
  - $10101010_2 = ??_{10}$
  - $11110000_2 = ??_{10}$
  - $-98_{10} = ??_2$
  - $-3_{10} = ??_2$
  - Wie kann man anhand einer Binärzahl im Zweierkomplement erkennen, ob diese positiv oder negativ ist?
  - Wie kann man mithilfe des Zweierkomplements aus einer positiven die davon negative Zahl bilden?

### Hinweis/Lösung



**Tipp:** Um das Vorzeichen einer Binärzahl im Zweierkomplement zu tauschen, kann man folgendermaßen vorgehen:

1. Einfaches Komplement bilden
2. 1 addieren



### (A4)

Löse die folgenden Rechenaufgaben und überprüfe das Ergebnis, indem du die Operanden und das Ergebnis dezimal umrechnest (alle Binärzahlen sind als Zweierkomplement dargestellt):

```
1001 1010
+0000 1111
```

```
0010 1001
-1111 1111
```

```
0001 0001 * 1111 1101
```

### Material

<a href="#">2023-10-25_15-49.png</a>	25.6 KiB 25.10.2023 13:50
<a href="#">3bit-vorzeichenbit.svg</a>	17.8 KiB 25.10.2023 12:59
<a href="#">3bit_vorzeichenbit.png</a>	68.7 KiB 25.10.2023 12:59

<a href="#">4b_einerkomplement_unvoll.png</a>	88.3 KiB	25.10.2023	14:39
<a href="#">4b_zweierkomplement_unvoll.png</a>	90.5 KiB	25.10.2023	14:39
<a href="#">4bit_vorzeichenbit_leer.png</a>	60.5 KiB	25.10.2023	13:32
<a href="#">einerkomplement.png</a>	81.9 KiB	25.10.2023	14:26
<a href="#">ganzezahlen_binaer.odp</a>	136.0 KiB	14.09.2022	14:19
<a href="#">ganzezahlen_binaer.pdf</a>	132.8 KiB	14.09.2022	14:19
<a href="#">rech2k.png</a>	60.3 KiB	25.10.2023	15:14
<a href="#">umr_2k.png</a>	137.9 KiB	25.10.2023	15:14
<a href="#">vorzeichenbit.png</a>	229.4 KiB	12.09.2022	18:49
<a href="#">zkkreis.png</a>	79.0 KiB	12.09.2022	19:30
<a href="#">zweierkomplement.png</a>	84.3 KiB	25.10.2023	14:25

Diese Seite entstand unter Verwendung von Ideen und Material von D. Zechnall.

From:  
<https://info-bw.de/> -

Permanent link:  
[https://info-bw.de/faecher:informatik:oberstufe:codierung:zahlendarstellungen:ganze\\_zahlen:start?rev=1698243923](https://info-bw.de/faecher:informatik:oberstufe:codierung:zahlendarstellungen:ganze_zahlen:start?rev=1698243923)

Last update: **25.10.2023 14:25**

