

Ganze Zahlen \mathbb{Z}

In Informatiksystemen ist es auch nötig, mit negativen Zahlen zu arbeiten. So kann man eine Subtraktion als Addition der Gegenzahl auffassen: $11 - 6 = 11 + (-6)$ - es vereinfacht also vieles, wenn man weiß, wie man diese Gegenzahlen finden kann. **Aber wie kann man negative Zahlen im Binärsystem darstellen?**

Vorzeichenbit

Ein erster Gedanke: Man könnte einfach das Bit ganz links als "Vorzeichenbit" verwenden.

- $+42_{10} = 00101010_2$
- $-42_{10} = 10101010_2$



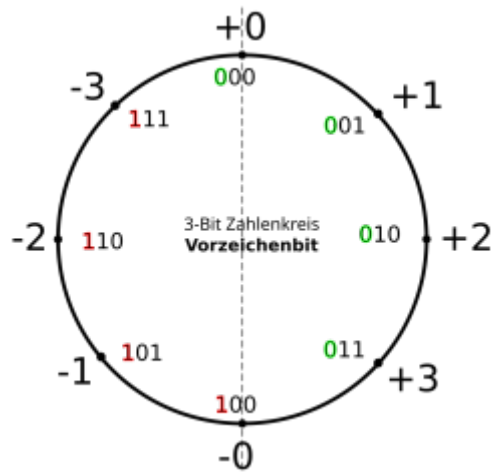
(A1)

Verwende die binäre Darstellung für +42 und -42 von oben und addiere schriftlich (im Binärsystem) jeweils die Zahl $3_{10} = 011_2$. Erläutere anhand dieses Beispiels, warum die Darstellung mit einem "Vorzeichenbit" problematisch ist.

Hinweis

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 42 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| + 3 | | | | | | | | 11 |
| <hr/> | | | | | | | | |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| - 42 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| + 3 | | | | | | | | 11 |
| <hr/> | | | | | | | | |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Wenn man sich auf eine festgelegte Stellenzahl beschränkt, kann man sich die Darstellung ganzer Zahlen im Binärsystem an einem "**Zahlenkreis**" veranschaulichen. Für Zahlen mit einer Länge von 3Bit sieht dieser so aus:



Man kann hier schön sehen, dass man mit drei Bit alle Zahlen von -3 bis +3 darstellen kann.



(A2)

- Kannst du am Zahlenkreis weitere Probleme der Darstellung negativer Zahlen mit einem Vorzeichenbit erkennen?
- Berechne $+1 + (-1)$ in der aus dem Kreis entnommenen Binärdarstellung. Erkennst du ein Problem.
- Zeichne den Zahlenkreis für 4Bit lange Binärzahlen. Welchen Wertebereich kann man hier abdecken?
- Formuliere stichwortartig eine kurze Zusammenfassung zur Darstellung negativer Zahlen mit dem Vorzeichenbit - siehst du Vorteile? Siehst du Nachteile? Ist das eine gute Darstellungsmöglichkeit?

Hinweis "weiteres Problem":

Woran liegt es, dass man statt der üblichen 8 Zahlen, die man mit 3Bit darstellen kann nur 7 Zahlen darstellen kann?

Lösung Rechnung

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 0 & 0 & 1 \\
 + & 1 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & 1 & 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 + 1 \\
 - 1 \\
 \\
 - 2 \downarrow
 \end{array}
 \end{array}$$

Hinweis: Zahlenkreis 4Bit

Du kannst dich an folgendem, teilweise ausgefüllten Kreis orientieren:



Komplementdarstellungen

Um die verheerende Rechenschwäche des Vorzeichenbits zu beheben, haben sich **Komplementdarstellungen** für negative Zahlen etabliert.

Um das "Komplement" einer binären Zahl zu bilden, werden an allen Stellen 1 und 0 vertauscht.

Dies hat den Vorteil, dass Rechenoperationen wie z.B. die Addition in beiden Zahlenbereichen funktionieren.

Einerkomplement

Eine negative Zahl im Dezimalsystem wird bei der **Einerkomplement**-Darstellung zunächst als Betrag in eine Binärzahl umgewandelt und dann das Komplement gebildet. Negative Zahlen beginnen dabei stets mit einer 1, d.h. man muss evtl. links eine oder mehrere 0-en anfügen, um bei der Komplementbildung die "Vorzeichen-Eins" zu erhalten.

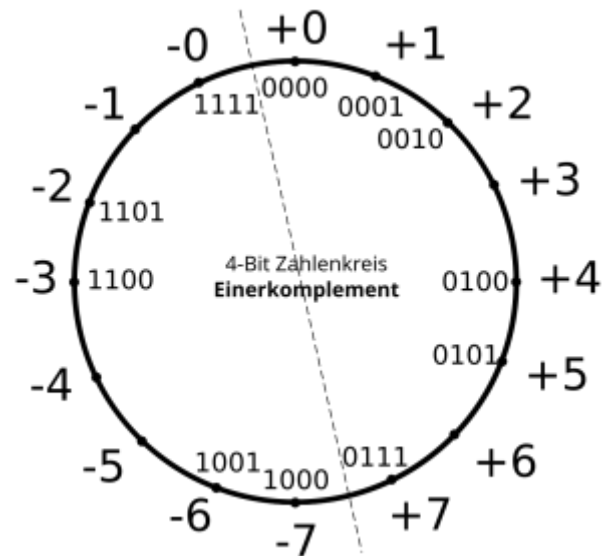
Beispiel

- Wenn man -6_{10} im Einerkomplement darstellen möchte, ermittelt man zunächst die Binärdarstellung von $+6_{10} = 110_2$
- Nun fügt man links eine weitere 0 an: 0110_2 - diese verändert zunächst nichts am Zahlenwert, schafft aber Platz für eine weitere Stelle für das Vorzeichen.
- Abschließend bildet man das Komplement und erhält die **Einerkomplementdarstellung** für $-6_{10} = 1001_2$.



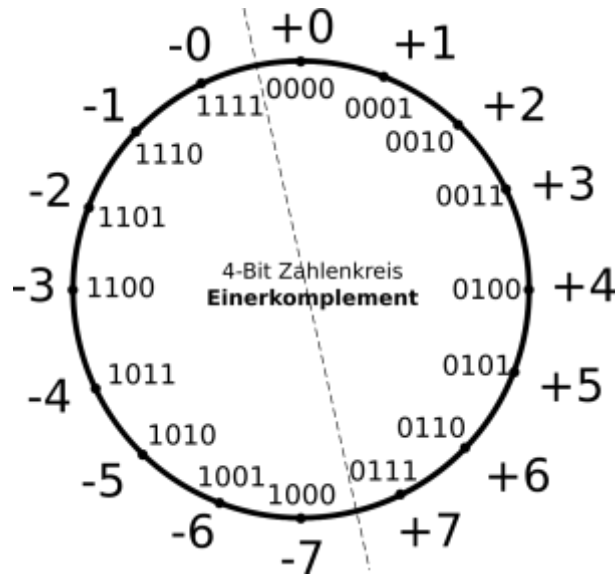
(A3)

Auch die Einerkomplementdarstellung kann man sich an einem Zahlenkreis veranschaulichen - für Binärzahlen der Länge 4 Bit sieht der (unvollständige) Zahlenkreis so aus:



- Vervollständige den Zahlenkreis.
- Berechne schriftlich im Binärsystem $-5 + 2$.
- Berechne schriftlich im Binärsystem $-5 + 6$.
- Bestimme die Einerkomplementdarstellung von 0000_2
- Woran kann man bei der Darstellung im Einerkomplement negative Binärzahlen erkennen?
- Welche Folgerungen ziehst du aus den Ergebnissen dieser Aufgabe?

Lösung: Zahlenkreis



Lösungen: Rechnungen

Zweierkomplement

Die Idee des ZK ist es, jeweils das Bit mit der höchsten Wertigkeit als negativen Wert zu definieren. Ein Beispiel anhand eines 8-Bit-Wertes:

| | | | | | | | | |
|-----------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Stelle | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Wertigkeit 2er-Potenz | -2^7 | 2^6 | 2^5 | 2^4 | 2^3 | 2^2 | 2^1 | 2^0 |
| Wertigkeit dezimal | -128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |

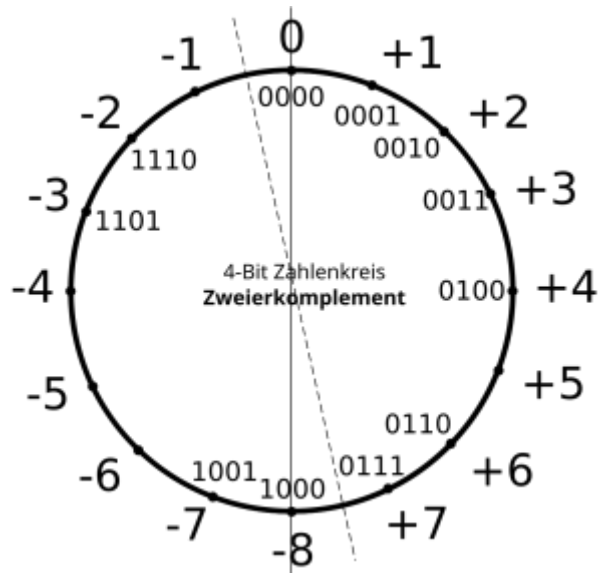


(A4)

Die Tabelle oben sieht für Binärzahlen der Länge 4 Bit so aus:

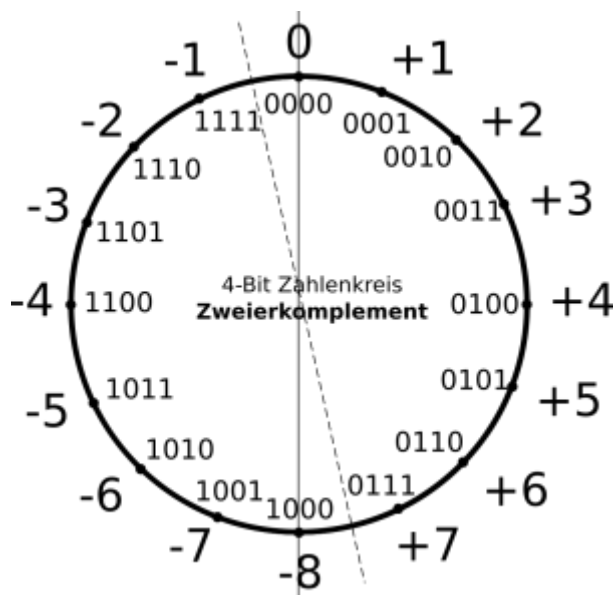
| | | | | |
|-----------------------|--------|-------|-------|-------|
| Stelle | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Wertigkeit 2er-Potenz | -2^3 | 2^2 | 2^1 | 2^0 |
| Wertigkeit dezimal | -8 | 4 | 2 | 1 |

Der Zahlenkreis sieht für 4 Bit Binärzahlen im Zweierkomplement (unvollständig) so aus:



- Vervollständige den Zahlenkreis
- Kannst du ein allgemeines Vorgehen formulieren, wie man aus einer positiven Binärzahl z die negative Binärzahl $-z$ in der Zweierkomplementdarstellung erhalten kann?

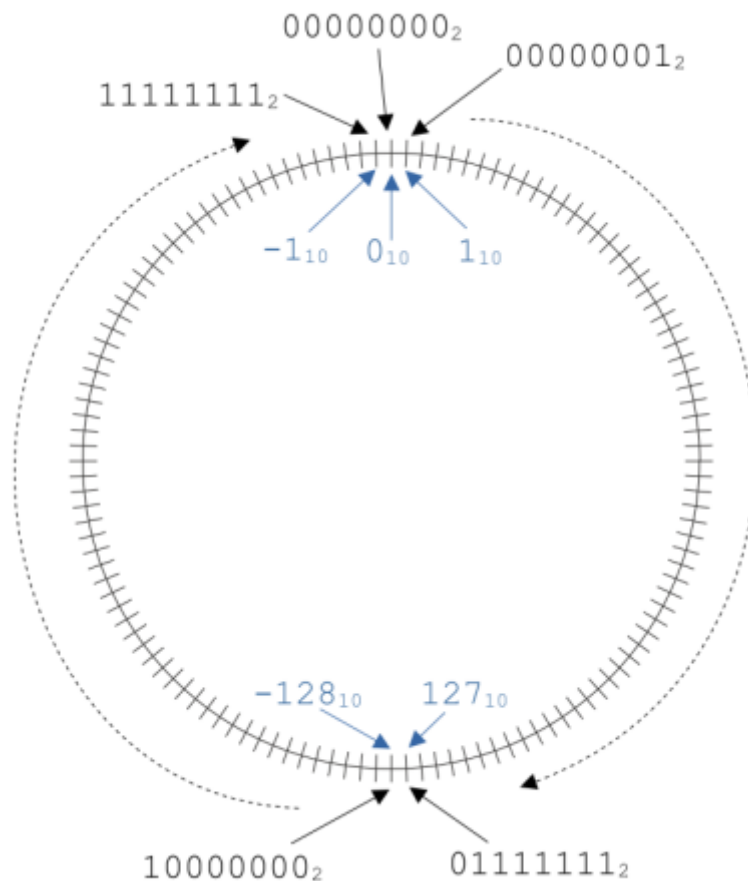
Lösung Zahlenkreis



Hinweis Vorgehen

Betrachte die Zahlen im Zahlenkreis - was muss man machen, um aus dem einfachen Komplement einer Zahl die Zweierkomplementdarstellung ihrer Gegenzahl zu erhalten?

So erhält man eine eindeutige Darstellung der 0 und kann auch "über die Null hinweg" rechnen, ohne Fehler zu machen. Die folgende Veranschaulichung kann helfen, das zu verstehen.



Vorgehen

Wenn die Zahl z als Binärzahl gegeben ist, erhält man $-z$ in Zweierkomplementdarstellung, indem man erst alle Bits invertiert und zum Ergebnis dieser Operation 1 addiert.

Beispiel: $3_{10} = 0011_2$. man erhält -3 im Zweierkomplement, indem man zunächst alle Stellen der Binärzahl invertiert: 1100_2 . Dann addiert man 1: $1101_2 = -8 + 4 + 1 = -3$.



Mithilfe des sogenannten **Zweierkomplements** lassen sich negative Binärzahlen so darstellen, **dass alle Rechenregeln wie bislang funktionieren.**



(A5)

- Welcher Zahlbereich lässt sich im ZK mit 8 Bit darstellen?

- Welcher Zahlbereich lässt sich im ZK mit n Bit darstellen?
- Rechne um:
 - $10101010_2 = ??_{10}$
 - $11110000_2 = ??_{10}$
 - $-98_{10} = ??_2$
 - $-3_{10} = ??_2$
 - Wie kann man anhand einer Binärzahl im Zweierkomplement erkennen, ob diese positiv oder negativ ist?
 - Wie kann man mithilfe des Zweierkomplements aus einer positiven die davon negative Zahl bilden?

Hinweis/Lösung



Tipp: Um das Vorzeichen einer Binärzahl im Zweierkomplement zu tauschen, kann man folgendermaßen vorgehen:

1. Einfaches Komplement bilden
2. 1 addieren



(A4)

Löse die folgenden Rechenaufgaben und überprüfe das Ergebnis, indem du die Operanden und das Ergebnis dezimal umrechnest (alle Binärzahlen sind als Zweierkomplement dargestellt):

```
1001 1010
+0000 1111
```

```
0010 1001
-1111 1111
```

Material

| | |
|--|----------------------------|
| 2023-10-25_15-49.png | 25.6 KiB 25.10.2023 13:50 |
| 3bit-vorzeichenbit.svg | 17.8 KiB 25.10.2023 12:59 |
| 3bit_vorzeichenbit.png | 68.7 KiB 25.10.2023 12:59 |
| 4b_einerkomplement_unvoll.png | 88.3 KiB 25.10.2023 14:39 |
| 4b_zweierkomplement_unvoll.png | 90.5 KiB 25.10.2023 14:39 |
| 4bit_vorzeichenbit_leer.png | 60.5 KiB 25.10.2023 13:32 |
| einerkomplement.png | 81.9 KiB 25.10.2023 14:26 |
| ganzezahlen_binaer.odp | 136.0 KiB 14.09.2022 14:19 |
| ganzezahlen_binaer.pdf | 132.8 KiB 14.09.2022 14:19 |

| | | | |
|--------------------------------------|-----------|------------|-------|
| rech2k.png | 60.3 KiB | 25.10.2023 | 15:14 |
| umr_2k.png | 137.9 KiB | 25.10.2023 | 15:14 |
| vorzeichenbit.png | 229.4 KiB | 12.09.2022 | 18:49 |
| zkkreis.png | 79.0 KiB | 12.09.2022 | 19:30 |
| zweierkomplement.png | 84.3 KiB | 25.10.2023 | 14:25 |

Diese Seite entstand unter Verwendung von Ideen und Material von D. Zechnall.

From:
<https://info-bw.de/> -

Permanent link:
https://info-bw.de/faecher:informatik:oberstufe:codierung:zahlendarstellungen:ganze_zahlen:start?rev=1698245283

Last update: **25.10.2023 14:48**

