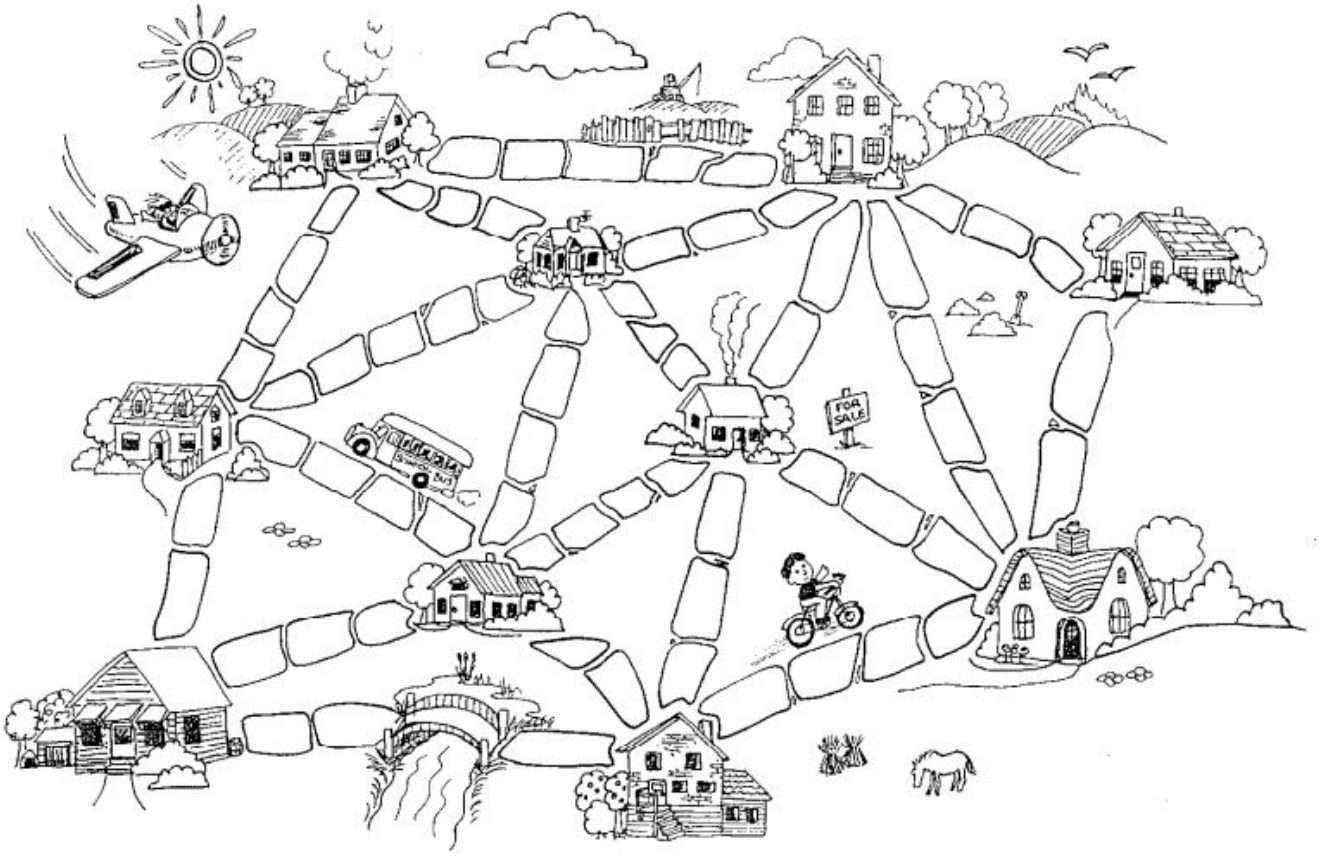
Minimalspannende Bäume

Muddy-City

Vor langer Zeit gab es eine Stadt, die keine Straßen hatte. Sich in dieser Stadt zu bewegen war insbesondere dann schwierig, wenn der Regen nach starken Gewittern die Wege sehr matschig machte. Fahrzeuge blieben stecken und jeder hatte ziemlich dreckige Schuhe. Daher entschied der Bürgermeister, einige Straßen zu asphaltieren. Allerdings wollte er nicht mehr Geld ausgeben als unbedingt nötig, damit auch noch ein Schwimmbad gebaut werden konnte.



1)

Also legte er zwei Bedingungen fest:

- Es müssen ausreichend Straßen asphaltiert werden, damit jeder von seinem Haus jedes andere Haus trockenen Fußes erreichen kann.
- Das Asphaltieren soll so wenig kosten wie möglich. Die Anzahl der Pflastersteine ist das Maß für die Kosten.

Aufgaben zum Muddy-City-Problem

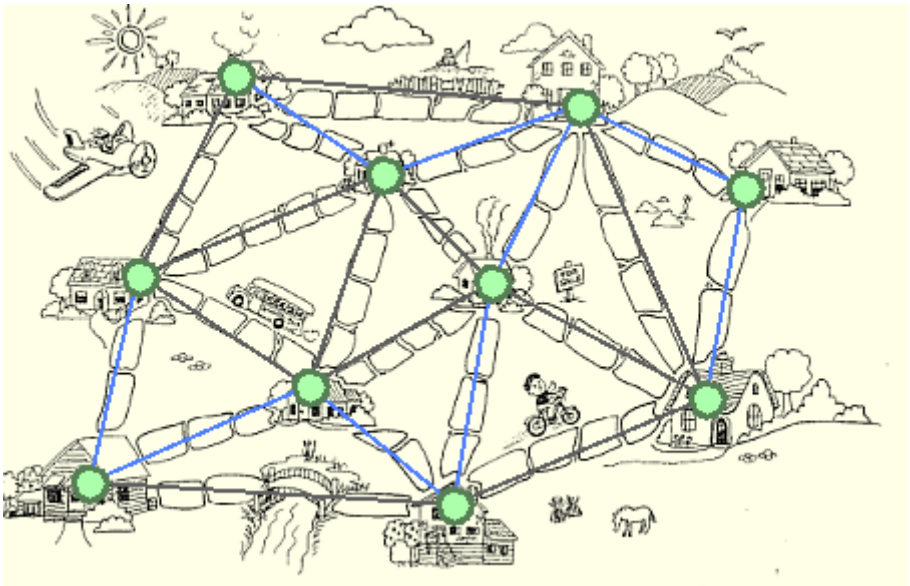
(A1)

Finde die Wege, die alle Häuser miteinander verbinden und deren Asphaltierung am wenigsten kostet (=Pflastersteine beinhaltet).

Tipp

Die optimale Lösung besteht aus 23 Pflastersteinen.

Lösung



(A2)

Welche Strategien hast du genutzt, um das Problem zu lösen?

Das Minimaler Spannbaum Problem (Minimal spanning tree)

Gegeben ist ein zusammenhängender, gewichteter, ungerichteter Graph.

Gesucht ist die Teilmenge der Kanten, so dass der Graph zusammenhängend bleibt und die Summe der Kantengewichte möglichst klein ist.

Vertiefung: Fragen & Aufgaben

(A3)

Wende den Algorithmus "MST (Prim)" zur Bestimmung des minimalen Spannbaums im Graphentester auf die Karte der größten Städte in Deutschland an (`02_deutschlandkarte.csv` im Ordner `08_minimalspanningtree`). Beachte, dass nur markierte Kanten sichtbar sind, da es zu viele Kanten gibt, um sie alle übersichtlich darzustellen. Vergleiche mit dem Autobahnnetz in Deutschland. Nenne Ursachen für Unterschiede.

(A4)

Öffne den Stadtplan von Baden-Baden (03_badenbaden.csv) und die Karte mit den Fährstrecken (04_inseln.csv) jeweils im Graphentester. Gib je eine realitätsnahe Problemstellung für diese Graphen an, bei denen ein minimaler Spannbaum die beste Lösung ist.

Lösungsvorschläge

- Stadtplan: z.B. Wasserrohre, Gasleitungen, Netzwerkkabel verlegen.
- Inselkarte: Beschränkung auf Fährverbindungen mit einer möglichst kurzen Gesamtstrecke, so dass trotzdem alle Inseln verbunden sind.

Zwei Algorithmen

Wir betrachten zwei Algorithmen zur Lösung des Problems des minimal spannenden Baums:

- Algorithmus von Kruskal[2)]
- Algorithmus von Prim[3)]

Weitere Fragen und Aufgaben

(A5)

Untersuche, ob die Algorithmen zur Bestimmung des minimalen Spannbaums auch mit negativen Kantengewichten zurechtkommt.

Lösung

Negative Kantengewichte stellen kein Problem dar, da es beim Algorithmus nur auf die Sortierreihenfolge der Kanten ankommt und nicht auf den Wert des Gewichts. Diese Sortierung funktioniert auch bei negativen Kantengewichten.

(A6)

Begründe, warum es sich bei den Algorithmen zur Bestimmung des minimalen Spannbaums um Greedy-Algorithmen handelt.

Lösung

Kruskal ist ein Greedy-Algorithmus, da in jedem Schritt die günstigste Kanten ausgewählt wird, die nicht zu einem Zyklus führt.

Prim ist ein Greedy-Algorithmus, da immer die kürzeste Kante gewählt wird, um den Baum zu erweitern.

[1] Quelle: Minimal Spanning Tree Activity, csunplugged.org (Lizenz: CC BY-NC-SA 4.0), URL: https://classic.csunplugged.org/minimal-spanning-trees/#The_Muddy_City

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Algorithmus_von_Kruskal

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Algorithmus_von_Prim

From:
https://info-bw.de/ -

Permanent link:
https://info-bw.de/faecher:informatik:oberstufe:graphen:zpg:minimalspanningtree:start?rev=1670416437

Last update: **07.12.2022 12:33**