Grundlagen der Aussagenlogik

Eine **Aussage** bezeichnet ein sprachliches Gebilde, dem in sinnvoller Weise genau eine der beiden Eigenschaften **wahr** oder **falsch** zugeordnet werden kann. Man kürzt ab: wahr=1, falsch=0.

In der **Aussagenlogik** oder **Schaltalgebra** verwenden wir

- **Variablen**, die meist mit $x_0,x_1,x_2...$ bezeichnet werden. Bei diesen Variablen handelt es sich um boolsche Werte, sie können also nur zwei Zuständen (0 - Falsch, 1 - Wahr) annehmen.
- **Logische Funktionen** ordnen einer oder mehreren boolschen Variablen einen Funktionswert zu, sie werden oft mit y bezeichnet. Der Funktionswert kann ebenfalls nur 1 (wahr) oder 0 (falsch) sein. Logische Funktionen lassen sich sehr gut als **Wahrheits**- oder **Wertetabellen** darstellen, da durch die beschränkte, diskrete Anzahl der Variablenkombinationen häufig eine Auflistung aller Funktionswerte möglich ist.
- "Gerechnet" wird mit den logischen Verknüpfungen
  - AND: ∧
  - OR: ∨
  - NOT: ¬
- Beim Rechnen gelten - ähnlich wie die Punkt vor Strich Regeln: **"Klammer vor NOT vor AND vor OR"**

Die Verknüpfung mit **UND ∧** nennt man **Konjunktion**
Die Verknüpfung mit **ODER ∨** nennt man **Disjunktion**

"Rechenregeln" der Schaltalgebra

Kommutativgesetz (Vertauschung erlaubt)

- $x_0 \land x_1 = x_1 \land x_0$
- $x_0 \lor x_1 = x_1 \lor x_0$

Distributivgesetz (Gießkannenregel)

- $x_0 \land (x_1\lor x_2)= (x_0 \land x_1) \lor (x_0 \land x_2$)
- $x_0 \lor (x_1\land x_2)= (x_0 \lor x_1) \land (x_0 \lor x_2$)

Neutralelement

- $x_0 \lor 0 = x_0$
- $x_0 \land 1 = x_0$

Komplement

- $x_0 \land \lnot x_0 =0$
- $x_0 \lor \lnot x_0 = 1$

Assoziativgesetze (Klammern dürfen bei gleichen Operatoren weggelassen/umgesetzt werden)

- $(x_0 \land x_1) \land x_2 = x_0 \land x_1 \land x_2 = x_0 \land (x_1 \land x_2)$
- $(x_0 \lor x_1) \lor x_2 = x_0 \lor x_1 \lor x_2 = x_0 \lor (x_1 \lor x_2)$

Idempotenzgesetze

- $x_0 \land x_0 = x_0$
- $x_0 \lor x_0 = x_0$

Absorptionsgesetze

- $x_0 \lor (x_0\land x_1) = x_0$
- $x_0 \land (x_0\lor x_1) = x_0$

De Morgan’sche Regel ("ausmultiplizieren des NICHT")

- $\lnot(x_0 \lor x_1)= \lnot x_0 \land \lnot x_1$
- $\lnot(x_0 \land x_1)= \lnot x_0 \lor \lnot x_1$

Beispiel

Gegeben ist die logische Funktion f durch

$$f=(\lnot x_0 \land \lnot x_1 \land x_2) \lor (\lnot x_0 \land x_1 \land \lnot x_2) \lor (\lnot x_0 \land x_1 \land x_2) \lor (x_0 \land \lnot x_1 \land x_2)$$

(A1)

- Wieviele Zeilen hat die Wahrheitstabelle dieser Funktion?
- Schreibe die Wahrheitstabelle der Funktion auf[1].

Lösung

x0	x1	x2	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Nun stellt sich die **Frage**, ob man den doch sehr langen Funktionsterm vielleicht unter Verwendung der Rechengesetze so **vereinfachen** kann, dass man einen kürzeren Term als Ergebnis erhält, der **dieselbe Wahrheitstabelle** hat, also **dieselbe logische Funktion** beschreibt.

Wenn man die Wertetabelle der Beispielfunktion betrachtet, fällt auf:

(1) Wenn $x_0=0$ und $x_1=1$ ist der Funktionswert 1, gleichgültig, was für einen Wert x_2 annimmt.

x0	x1	x2	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Das entspricht den beiden eingerahmten Termen:

$$f = (\neg x_0 \land \neg x_1 \land x_2) \lor \boxed{(\neg x_0 \land x_1 \land \neg x_2) \lor (\neg x_0 \land x_1 \land x_2)} \lor (x_0 \land \neg x_1 \land x_2)$$

Rechnerisch kann man hier den Teilterm $(\lnot x_0 \land x_1)$ ausklammern, so dass der eingerahmte Term zu $$(\lnot x_0 \land x_1) \land (\lnot x_2 \lor x_2)$$

wird.

(A2)

Vereinfache die folgenden logischen Terme:

- $f = x_1\land(\lnot x_2) \lor x_1\land x_2$
- $g = x_1\land (\lnot x_2)\land x_3 \lor x_1\land(\lnot x_2)\land(\lnot x_3) \lor (\lnot x_1)\land (\lnot x_2)\land (\lnot x_3)$

$h = (\neg x1)\cdot(\neg x2)\cdot(\neg x3) + (\neg x1)\cdot(\neg x2)\cdot x3 + (\neg x1)\cdot x2\cdot x3 + x1\cdot(\neg x2)\cdot(\neg x3) + x1\cdot x2\cdot x3 + x1\cdot x2\cdot(\neg x3)$

[1] Das geht auch mit einem Tabellenverarbeitungsprogramm….