Normalformen

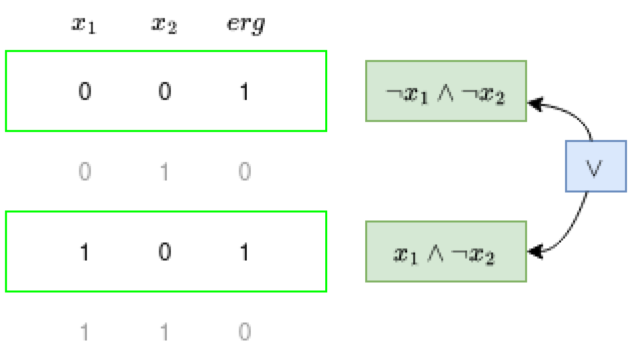
Disjunktive Normalform

Die **disjunktive Normalform** bietet ein Verfahren, mit dem man systematisch einen Logik-Term zu einer Wahrheitstabelle finden kann, bei dem der entstehende Term eine Disjunktion von Konjunktionstermen ist – also eine Oder-Verknüpfung von Und-Verknüpfungen.

Vorgehen:

> Zu jeder Zeile der Wahrheitstafel, bei der das Ergebnis 1 ist, bildet man einen **Minterm**. Dies ist ein Term, in dem alle Eingangsvariablen mit der **Und-Verknüpfung** verbunden werden. Hat eine Variable den Wert 0, steht sie negiert im Minterm.
>
> Die **disjunktive** Normalform erhält man, indem man alle Minterme durch **Oder**-Verknüpfungen verbindet.

Beispiel:



- Für jede Zeile, die "wahr" ist, bildet man den Minterm mit "und". Alle "falsch" Werte werden dabei einfach negiert.
- Alle so gefundenen Zeilen verknüpft man mit "oder"

Die disjunktive Normalform für die Wahrheitstafel im Beispiel ist also $(\lnot x_1 \land \lnot x_2) \lor (x_1 \land \lnot x_2)$.

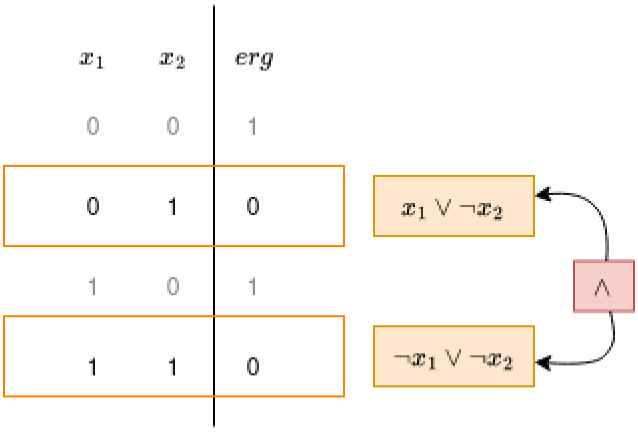
Konjunktive Normalform

Die **konjunktive Normalform** bietet ein Verfahren, mit dem man systematisch einen Logik-Term zu einer Wahrheitstabelle finden kann, bei dem der entstehende Term eine Konjunktion von Disjunktionstermen ist – also eine Und-Verknüpfung von Oder-Verknüpfungen.

Vorgehen:

> Zu jeder Zeile der Wahrheitstafel, bei der das Ergebnis 0 ist, bildet man einen **Maxterm**. Dies ist ein Term, in dem alle n Eingangsvariablen mit der **Oder-Verknüpfung** verbunden werden, alle "wahr"-Werte werden dabei negiert.
>
> Die **konjunktive** Normalform erhält man, indem man alle Maxterme durch **Und**-Verknüpfungen verbindet.

Beispiel:



- Für jede Zeile, die "falsch" ist, bildet man den Maxterm mit "oder". Alle "wahr" Werte werden dabei einfach negiert.
- Alle so gefundenen Zeilen verknüpft man mit "und"

Eine konjunktive Normalform für die Wahrheitstafel im Beispiel ist also $(x_1 \lor \lnot x_2) \land (\lnot x_1 \lor \lnot x_2)$.

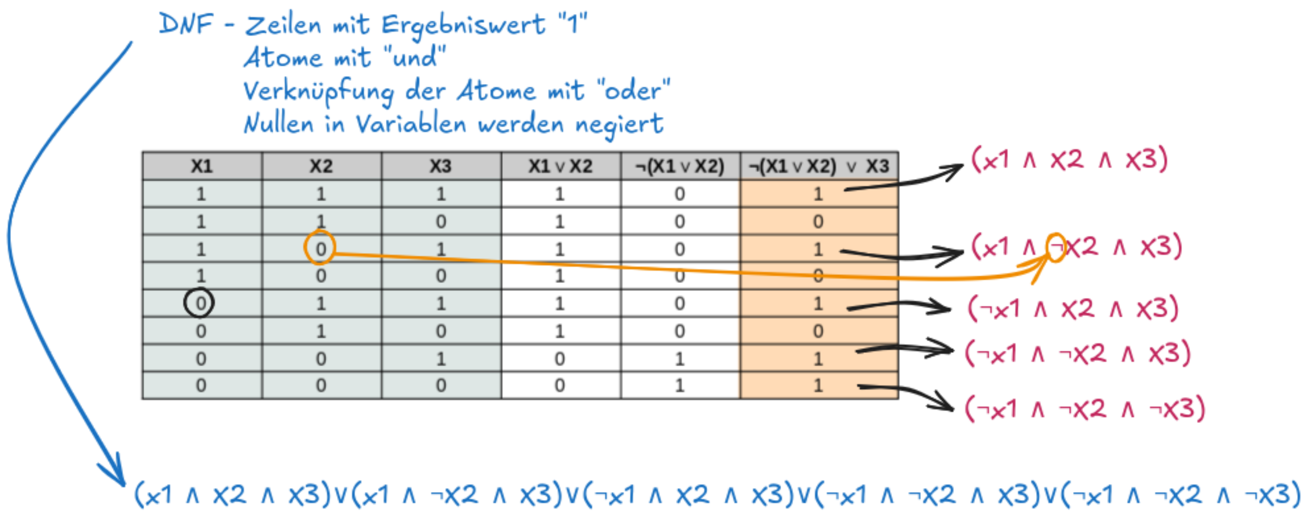
(A1)

Stelle zum Term $(\lnot(x_1 \lor x_2) \lor x_3)$ die Wahrheitstafel auf und ermittle daraus die DNF und eine KNF. Versuche dann DNF und KNF durch Umformungen des Terms zu erhalten - welche Rechenregeln verwendest du dabei?

Lösungshinweis 1 - Wahrheitstabelle

X1	X2	X3	X1 ∨ X2	¬(X1 ∨ X2)	¬(X1 ∨ X2) ∨ X3
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

Lösungshinweis 1 - DNF



(A2)

Gesucht ist eine boolesche Funktion mit drei Variablen E1, E2 und E3, deren Ausgang A genau dann den Wert TRUE annimmt, wenn die Dualzahl[E3 E2 E1]$_2$ eine Primzahl ist.

- Ermittle die DNF der Funktion.
- Vereinfache die DNF der Funktion so weit wie möglich.
- Erstelle die KNF der Funktion.
- Vereinfache die KNF der Funktion so weit wie möglich.
- Überprüfe ob die beiden vereinfachten Terme aus DNF und KNF zum gleichen Resultat führen.

Lösungsvorschlag für KNF/DNF

E3	E2	E1	Dezimal	Primzahl?	
0	0	0	0	0	$E3 \lor E2 \lor E1$
0	0	1	1	0	$E3 \lor E2 \lor \neg E1$
0	1	0	2	1	$\neg E3 \land E2 \land \neg E1$
0	1	1	3	1	$\neg E3 \land E2 \land E1$
1	0	0	4	0	$\neg E3 \lor E2 \lor E1$
1	0	1	5	1	$E3 \land \neg E2 \land E1$
1	1	0	6	0	$\neg E3 \lor \neg E2 \lor E1$
1	1	1	7	1	$E3 \land E2 \land E1$

DNF $(\neg E3 \land E2 \land \neg E1) \lor (\neg E3 \land E2 \land E1) \lor (E3 \land \neg E2 \land E1) \lor (E3 \land E2 \land E1)$

KNF $(E3 \lor E2 \lor E1) \land (E3 \lor E2 \lor \neg E1) \land (\neg E3 \lor E2 \lor E1) \land (\neg E3 \lor \neg E2 \lor E1)$

Diese Seite ist sehr stark an das Material auf https://inf-schule.de/rechner/digitaltechnik/Schaltnetze/Fachkonzept_Normalform angelehnt, das unter einer CC-BY-SA Lizenz veröffentlicht ist.